Kolokwium z FAN*

26 stycznia 2024

Kolokwium trwa 3 godziny. **Należy wybrać i rozwiązać pięć z poniższych sześciu zadań**. Każde zadanie warte jest 10 punktów. Proszę zapisywać rozwiązania różnych zadań na osobnych, podpisanych kartkach. Proszę **dokładnie** uzasadniać wszystkie kroki rozwiązania, powołując się na odpowiednie fakty, które należy nazwać lub przytoczyć ich treść (należy też uzasadniać, że można z nich korzystać, tzn. że założenia używanego faktu są spełnione).

+ **1.** Dane są obszar $U \subset \mathbb{C}$, funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C}$ oraz krzywa zamknięta γ, która jest kawałkami C^1, a jej obraz jest zawarty w U. Wykazać, że

$$i \int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\, dz \in \mathbb{R}.$$

2. Obliczyć

$$\int_0^\pi \operatorname{tg}^2(t - i)\, dt.$$

Wynik należy wyrazić bez używania szeregów czy całek oraz należy doprowadzić go do takiej postaci, by było widać, jakie są jego części rzeczywista i urojona.

3. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^4}. \qquad \frac{z^n}{n^4} = \left(\frac{w^n}{n}\right)^4$$

Wynik należy wyrazić bez używania szeregów czy całek oraz należy doprowadzić go do takiej postaci, by było widać, że jest rzeczywisty.

+/− **4.** Wyznaczyć, w zależności od parametrów $a, b > 0$ i $n \in \{1.2. \ldots\}$, liczbę pierwiastków (licząc z krotnościami) wielomianu $z^{2n} + az^{2n-1} + b$ w obszarze $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

5. Załóżmy, że

+ $g \in \Sigma = \{h \colon \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \colon h$ jest jednolistna oraz $h(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots\}$.

Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ zachodzi

$$|g'(z) - 1| \leqslant \frac{1}{|z|^2 - 1}.$$

Uwaga: jednolistna=uniwalentna.

+/− **6.** Wyznaczyć wszystkie różnowartościowe funkcje całkowite $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

—